Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$. Arătați că $(f\circ f)(3)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6)=6-\log_2(x+6)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD. Arătați că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=2\sqrt{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $B=\frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4\\ ax+4y+z=6\\ x-y+az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M\left(a,b\right)$ este situat pe graficul funcției $g:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ și punctul $N\left(a,c\right)$ este situat pe graficul funcției $h:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $h\left(x\right)=8x-12$. Demonstrați că $b\geq c$, pentru orice $a\in\left[2,+\infty\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+4\right)f\left(x\right)dx=-\dfrac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $\left(-\infty,0\right]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\int_1^2 x^n f\left(x\right)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 2a_2=a_1+a_3$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_2 \Leftrightarrow 30=3a_2 \Leftrightarrow a_2=10$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(0)=9$	**3p**
3.	$(x-6)(x+6)=2^6 \Rightarrow x^2-36=64 \Rightarrow x^2-100=0$	**3p**
	$x=-10$, care nu convine; $x=10$, care convine	**2p**
4.	Cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în 5 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $5\cdot 5=25$ de numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$	**3p**
	Cum $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, obținem $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	**2p**
6.	$C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+(-1)+2-4-(-1)-2=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=2(a^2-1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}\neq 0$, deci matricea $A(a)$ are rangul $2\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2}{a+1},1,\frac{2}{a+1}\right)$	**3p**
	$\left(\frac{2}{a+1}\right)^2+1+\left(\frac{2}{a+1}\right)^2=3$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, obținem $a=-3$	**2p**

2.a)	$x*y=xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$	**2p**
	$=x\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$	**1p**
	$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=2$	**1p**
	$x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{1}{x}-x=0\Rightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	Presupunem că există x și y numere întregi, astfel încât x să fie simetricul lui y, deci $x*y=e$, de unde obținem $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=1\Rightarrow(2x-1)(2y-1)=4$, ceea ce nu convine, deoarece x și y sunt numere întregi și 4 este număr par	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-8+\frac{8}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-8x+8}{x}=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Dreapta este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, deci are panta egală cu $f'(2)$	**2p**
	Cum $f'(2)=0$, ecuația dreptei este $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=0$, obținem $f(a)\geq 0$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$	**2p**
	$f(a)\geq 0\Rightarrow g(a)\geq h(a)\Rightarrow b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+4)f(x)dx=\int_0^1(x^2-4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-4=-\frac{11}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f	**3p**
	$F''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția F este concavă pe $(-\infty,0]$	**2p**
c)	$x\in[1,2]\Rightarrow x^n(x^2-4)\leq 0$ și $\frac{1}{x^2+4}\geq\frac{1}{8}$, deci $x^nf(x)\leq\frac{1}{8}x^n(x^2-4)$	**2p**
	$I_n\leq\int_1^2\frac{1}{8}x^n(x^2-4)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{x^{n+3}}{n+3}-\frac{4x^{n+1}}{n+1}\right)\Big\|_1^2=\frac{1}{8}\left(-\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)}-\frac{1}{n+3}+\frac{4}{n+1}\right)$	**2p**
	Cum $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)}=+\infty$, obținem $\lim_{n\to+\infty}I_n=-\infty$	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că numărul $a=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației $x^2-11x+m=0$ sunt numere reale.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(7x)+\log_x 7=3$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(-4,4)$ și $C(-4,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2-a\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-3x-3y+6$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=14$
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $\left(2^n+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}\right)=2^{20}+\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2(3x^2-3x+1)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}\,dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}\,dt=x$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=$	**2p**
	$=16-9+9-16=0$, care este număr natural	**3p**
2.	$\Delta=121-4m$	**2p**
	$\Delta\ge 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{121}{4}\right]$, deci cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 30	**3p**
3.	$1+\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=3\Rightarrow\left(\log_7 x-1\right)^2=0$	**3p**
	$\log_7 x=1$, deci $x=7$, care convine	**2p**
4.	$C_n^2=45$, unde n este numărul de elemente al mulțimii, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=45$ și, cum n este număr natural, obținem $n=10$	**2p**
5.	Distanța de la punctul A la dreapta BC este egală cu 6	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot d(A,BC)}{2}=\frac{4\cdot 6}{2}=12$	**2p**
6.	$\cos x\cos x-\sin x\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1&a&a^2-a\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b&b^2-b\\0&1&2b\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b+a&b^2-b+2ab+a^2-a\\0&1&2b+2a\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&a+b&(a+b)^2-(a+b)\\0&1&2(a+b)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(3)A(-3)=A(0)=I_3$, deci inversa matricei $A(3)$ este matricea $A(-3)$	**2p**
	$X=A(-3)\cdot A(5)\Leftrightarrow X=A(2)$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$x*y=2xy-3x-3y+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=2\left(xy-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}=$	**3p**
	$=2\left(x\left(y-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=14 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$	**2p**
	$x-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$ sau $x-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, deci $x=-1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$4\left(2^n+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=2^{20}+\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{2+n+n+1+n+2}=2^{20}$	**3p**
	$3n+5=20$, deci $n=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{x^3}=$	**3p**
	$=\frac{-2x^3+2x^3-6x^2+6x-2}{x^3(x-1)^3}=\frac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	Panta dreptei care este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$ este $f'(2)=-\frac{7}{4}$	**3p**
	Ecuația dreptei este $y-3=f'(2)(x-0)$, deci $y=-\frac{7}{4}x+3$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-n^2}\right)^{-1}=e^{-1}$	**2p**
2.a)	$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{f(x)}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}-\sqrt{1}=1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$	**3p**
	$=x\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_0^1$, deci $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$	**2p**
c)	Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x e^{f^2(t)}dt-x$ este derivabilă și $g'(x)=e^{x^2+1}-1$	**2p**
	$g'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $g(0)=0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3-i$. Arătați că $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6$. Determinați numărul real a, știind că $f(a)=f(a-2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+4x+5\right)=\log_4(2x+4)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(3,3)$ și $C(7,3)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x+2\sin\frac{5x}{3}$, unde $x\in(0,\pi)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & -2a^2 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-\sqrt{3}(x+y)+3+\sqrt{3}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}*0=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\frac{1}{e-1}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{(x+2)^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+1)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(3-i)^2-6(3-i)+10=$	**2p**
	$=9-6i+i^2-18+6i+10=0$	**3p**
2.	$f(a)=a^2+6$, $f(a-2)=(a-2)^2+6$	**2p**
	$a^2+6=(a-2)^2+6$, de unde obținem $a=1$	**3p**
3.	$x^2+4x+5=2x+4 \Rightarrow x^2+2x+1=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au produsul cifrelor egal cu 16, are 3 elemente, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**1p**
	$x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow x_D=4$	**2p**
	$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow y_D=5$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}+2\sin\dfrac{5\pi}{6}=$	**2p**
	$=1-1+0+2\cdot\dfrac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1 & -2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & -2a^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2b & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2b & -2b^2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2b-2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a+2b & -4ab-2a^2-2b^2 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & -2(a+b) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2(a+b) & -2(a+b)^2 & 1\end{pmatrix}=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

c)	$A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)=A(1+2+3+\ldots+2020)=A\left(\frac{2020\cdot 2021}{2}\right)=$ $=A(1010\cdot 2021)$, deci $n=1010\cdot 2021$, care este multiplu de 2021	**3p** **2p**
2.a)	$\sqrt{3}*0=\sqrt{3}\cdot 0-\sqrt{3}(\sqrt{3}+0)+3+\sqrt{3}=$ $=-3+3+\sqrt{3}=\sqrt{3}$	**3p** **2p**
b)	$x*y=xy-\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+3+\sqrt{3}=$ $=x(y-\sqrt{3})-\sqrt{3}(y-\sqrt{3})+\sqrt{3}=(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x*\sqrt{3}=\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}*y=\sqrt{3}$, unde x și y sunt numere reale $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\sqrt{3}\right)*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}=\sqrt{3}*\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}\right)=\sqrt{3}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+4)e^x-(x^2+4x+4)e^x}{(e^x)^2}=$ $=\frac{e^x(-x^2-2x)}{(e^x)^2}=\frac{-x(x+2)}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{e^x}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}(g(1)+g(2)+\ldots+g(n))=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{1}{e-1}$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1(2x+1)dx=(x^2+x)\Big\|_0^1=$ $=1+1=2$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx=2x\Big\|_0^1-\ln(x+1)\Big\|_0^1=$ $=2-\ln 2+\ln 1=2-\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+1)^n dx=e^x(2x+1)^n\Big\|_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+1)^{n-1}dx=$ $=e\cdot 3^n-1-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $2z-z^2=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$, unde m este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m, știind că $f(x)>0$ pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(\sqrt{x}+1\right)+\log_5\left(\sqrt{x}-1\right)=2$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ $B(2,5)$ și $C(6,1)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&2-a\\0&2&0\\2-a&0&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=8$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Arătați că $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Calculați $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln\left(x^2+1\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.
	2. Se consideră funcția $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{74}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{-3}^{3} |x f(x)| dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$. Demonstraţi că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z-z^2=2(1+i)-(1+i)^2=$	**2p**
	$=2+2i-\left(1+2i+i^2\right)=2+2i-2i=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2-8m$	**2p**
	$f(x)>0$ pentru orice număr real x, deci $\Delta<0$, de unde obținem $m\in(0,8)$	**3p**
3.	$\log_5\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\right)=2\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-1=5^2$	**3p**
	$x=26$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**2p**
	$2^n=32$, deci $n=5$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow ABDC$ paralelogram, deci segmentele AD și BC au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x=8$ și $y=5$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	**2p**
	$\cos x-\sin x=\sin x-\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}4-2a-2b+2ab&0&2a+2b-2ab\\0&4&0\\2a+2b-2ab&0&4-2a-2b+2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}ab-a-b+2&0&2-(ab-a-b+2)\\0&2&0\\2-(ab-a-b+2)&0&ab-a-b+2\end{pmatrix}=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(pq-p-q+2)=2I_3\Leftrightarrow A(pq-p-q+2)=A(2)\Leftrightarrow pq-p-q=0$	**2p**
	Cum p și q sunt numere întregi, din $(p-1)(q-1)=1$, obținem $p=0$, $q=0$ sau $p=2$, $q=2$	**3p**

2.a)	$x*y=-\frac{3}{5}xy+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x+y=-\frac{3}{5}x\left(y-\frac{5}{3}\right)+y-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x+1\right)+\frac{5}{3}=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}=-\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3x}-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\frac{(x-1)^2}{x}+\frac{5}{3},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x>0\Rightarrow\frac{5(x-1)^2}{3x}\geq 0$, deci $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{3}*y=\frac{5}{3}$, unde x și y sunt numere reale	**3p**
	$\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}=\left(\left(\frac{1}{3}*\ldots*\frac{4}{3}\right)*\frac{5}{3}\right)*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+4-2x}{x^2+1}=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right)=$	**2p**
	$=4-\ln 1=4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(25-x^2\right)dx=\left.\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=25-\frac{1}{3}=\frac{74}{3}$	**2p**
b)	$\int_{-3}^{3}\left\|x f(x)\right\|dx=-\int_{-3}^{0}x\sqrt{25-x^2}\,dx+\int_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-3}^{0}-\left.\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^3=\frac{125}{3}-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+\frac{125}{3}=\frac{122}{3}$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{1}{f^{n+1}(x)}dx-\int_0^1\frac{1}{f^n(x)}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}\left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1\right)dx$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}>0$ și $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1<0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow I_{n+1}-I_n\leq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că suma pătratelor elementelor mulțimii $M=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1<2\}$ este egală cu 5.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+5$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârfului parabolei asociate funcției f are abscisa egală cu 3.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x}$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor cu 10 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinaţi ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin mijlocul segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.
5p	**6.** Calculați $S=\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2020\pi$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(y)-A(2xy))=0$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^5$.
5p	**a)** Arătaţi că $2^5*3^5=5^5$.
5p	**b)** Determinați numărul real x, știind că $2^5*x^5*\left(243x^5\right)=100000$.
5p	**c)** Se consideră numerele $M=1^5*2^5*\ldots*10^5$ și $N=5^5\cdot 11^5$. Demonstrați că $M-N=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că graficul funcţiei f **nu** intersectează axa Ox.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1} |x f(x)| dx$.

5p **c)** Calculați $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n<3 \Rightarrow M=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma pătratelor elementelor mulțimii M este $0^2+1^2+2^2=5$	**2p**
2.	Abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m}{2}$	**2p**
	$\dfrac{m}{2}=3$, deci $m=6$	**3p**
3.	$x+2=8-x \Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 12 elemente are C_{12}^{10} submulțimi cu 10 elemente	**3p**
	$C_{12}^{10}=\dfrac{12\cdot 11}{2}=66$	**2p**
5.	$D(2,2)$, deci $M(5,6)$, unde M este mijlocul segmentului CD	**2p**
	$m_{AC}=3$, deci ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin punctul M este $y-6=3(x-5)$, deci $y=3x-9$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi=1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$S=(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-1)+(-1)-0-1-1=-4$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+2xy&0&1-2xy\\0&2&0\\1-2xy&0&1+2xy\end{pmatrix}$, $A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&1&-2xy\\1&0&1\\-2xy&1&2xy\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A(x)A(y)-A(2xy))=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)A\left(\dfrac{1}{2x}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$A(1)A\left(\dfrac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\dfrac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\dfrac{1}{2020}\right)=1010\cdot 2I_3$, deci $n=2020$	**3p**

2.a)	$2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5}\right)^5 =$	**3p**
	$= (2+3)^5 = 5^5$	**2p**
b)	$2^5 * x^5 * \left(243x^5\right) = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{x^5} + \sqrt[5]{243x^5}\right)^5 = (2+x+3x)^5 = (2+4x)^5$, unde x este număr real	**3p**
	$(2+4x)^5 = 10^5$, deci $x = 2$	**2p**
c)	$1^5 * 2^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5}\right)^5 = (1+2)^5$, $1^5 * 2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5}\right)^5 = (1+2+3)^5$	**2p**
	$M = 1^5 * 2^5 * 3^5 * \ldots * 10^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} + \ldots + \sqrt[5]{10^5}\right)^5 = (1+2+3+\ldots+10)^5 = 5^5 \cdot 11^5 = N$, de unde obținem $M - N = 0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} =$	**2p**
	$= \dfrac{2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1} + \ln\dfrac{x+1}{x}\right) = 1 + \ln 1 = 1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(1)$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**3p**
	$f(1) = \ln 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, de unde obținem că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{3} + 1 - 0 = \dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int\limits_{-1}^1 \|xf(x)\| dx = -\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1}\,dx + \int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx =$	**2p**
	$= -\dfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_{-1}^0 + \dfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^1 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$	**3p**
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int\limits_0^x t \cdot f(t)dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x f(x)}{2x} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3-3i$ și $z_2 = 5-6i$. Arătaţi că $2z_1 - z_2 = 1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+15$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)+f(m+1)=35$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale a și b, știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=4$. Știind că aria ΔABC este egală cu 6, calculaţi lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & a+1 & a\\ a & 6 & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+2y+z=3\\ 2x+(a+1)y+az=3\\ ax+6y+4z=a+3\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Arătaţi că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a)=A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.
5p	**c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.
	2. Pe mulțimea $M=(-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{100(x+y)}{xy+100}$.
5p	**a)** Arătaţi că $3*0=3$.
5p	**b)** Se consideră $f:M\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y\in M$.
5p	**c)** Determinați $x\in M$ pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de11 ori } x}=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+1\right)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x(x-3)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2020$.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui a, știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\int_e^a \ln x\,dx=2a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z_1 - z_2 = 2(3-3i)-(5-6i)=$	**2p**
	$=6-6i-5+6i=1$	**3p**
2.	$m+15+(m+1)+15=35$	**2p**
	$2m+31=35 \Rightarrow m=2$	**3p**
3.	$3^x(2-3)+27=0 \Leftrightarrow 3^x=27$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre care sunt multipli de 25 sunt $25\cdot 4$, $25\cdot 5,\ldots$, $25\cdot 39$, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{900}=\dfrac{1}{25}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$a=2$, $b=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 6=\dfrac{4\cdot AC}{2}\Rightarrow AC=3$	**3p**
	$BC=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&2&1\\2&a+1&a\\a&6&4\end{vmatrix}=8a+8+12+2a^2-a^2-a-12a-16=$	**3p**
	$=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(4)-A(1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&3\\3&0&0\end{pmatrix}$, $(A(4)-A(1))A(a)=3\begin{pmatrix}0&0&0\\a+2&a+7&a+4\\2&2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real	**3p**
	$A(a)(A(4)-A(1))=3\begin{pmatrix}1&2&2\\a&a+1&a+1\\4&6&6\end{pmatrix}$, deci $A(a)(A(4)-A(1))\neq(A(4)-A(1))A(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{Z}\setminus\{1,4\}$ și soluția sistemului de ecuații este $\left(\dfrac{a-3}{a-4},\dfrac{a-6}{a-4},-\dfrac{a-6}{a-4}\right)$	**3p**
	Cum x_0, y_0, z_0 și a sunt numere întregi, obținem $a=3$ sau $a=5$, care convin	**2p**

2.a)	$3*0=\frac{100(3+0)}{3\cdot 0+100}=$	**3p**
	$=\frac{300}{100}=3$	**2p**
b)	$f(x*y)=\frac{10-\frac{100(x+y)}{xy+100}}{10+\frac{100(x+y)}{xy+100}}=\frac{10xy-100x-100y+1000}{10xy+100x+100y+1000}=\frac{xy-10x-10y+100}{xy+10x+10y+100}=$	**3p**
	$=\frac{(x-10)(y-10)}{(x+10)(y+10)}=\frac{10-x}{10+x}\cdot\frac{10-y}{10+y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y\in M$	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 11 ori } x}\right)=f(0)$, deci $\underbrace{f(x)f(x)\dots f(x)}_{\text{de 11 ori } f(x)}=f(0)\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{11}=1$	**3p**
	$f(x)=1\Leftrightarrow 10-x=10+x$, deci $x=0$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-4x+1\right)+e^x(2x-4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-2x-3\right)=e^x(x-3)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2020\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0-3)(x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0=-1$ sau $x_0=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0,\ f(-1)=\frac{6}{e},\ f(3)=-2e^3$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,-1)$, pe $(-1,3)$ și pe $(3,+\infty)$, graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte $\Leftrightarrow f(x)=a$ are exact trei soluții reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\frac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,\frac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,+\infty\right)=\left(0,\frac{6}{e}\right)$	**3p**
2.a)	$F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$	**3p**
b)	$\int\limits_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int\limits_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_e^a\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_e^a-\int\limits_e^a x\cdot\frac{1}{x}dx=a\ln a-e-(a-e)=a\ln a-a$	**3p**
	$a\ln a-a=2a\Leftrightarrow a(\ln a-3)=0$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-2x$. Arătați că $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}$. Știind că O este un punct oarecare din plan, arătați că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Știind că $x\in(\pi,2\pi)$ și $\cos 2x=\frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x, y\in G$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:M\to G$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}$.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-x\right)dx = 2\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\dfrac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1+2i\sqrt{3}+3i^2-\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)=4i\sqrt{3}$	**3p**
	Partea reală a lui z este 0	**2p**
2.	$f(3)<0$, $f(4)<0$, $f(5)<0$	**2p**
	$f(0)>0$, $f(1)>0$ și $f(2)>0$, deci $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$	**3p**
3.	$(\log_2 x-1)^2=0 \Rightarrow \log_2 x=1$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2\cdot C_5^1=$	**3p**
	$=\dfrac{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CA}=$	**3p**
	$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p**
6.	$1-2\sin^2 x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{3}$	**3p**
	Cum $x\in(\pi,2\pi)$, obținem $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=10+6+4-4-4-15=-3$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases}2x-y+2z=4\\3x-y+2z=1\\2x-y+5z=-2\end{cases}$ și, cum $\det\left(A(-1)\right)=3\neq 0$, sistemul de ecuații este compatibil determinat	**2p**
	$x=-3$, $y=-14$, $z=-2$	**3p**
c)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}2&a&2\\3&a&2\\2&a&5\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=-3a$, pentru orice număr real a și, cum $\det\left(A(a)\right)=0$, obținem $a=0$	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$ și $\begin{vmatrix}2&2&4\\3&2&1\\2&5&b\end{vmatrix}=0$, deci $38-2b=0$, de unde obținem $b=19$	**3p**

2.a)	$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+1+1}=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)+1}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y\in G$	**2p**
b)	$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1}=x\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)=x^2-1$, pentru orice $x\in G$, deci $e^2-1=1$ și, cum $e\in G$, obținem $e=\sqrt{2}$	**3p**
	Cum $\sqrt{2}*x=\sqrt{(2-1)\left(x^2-1\right)+1}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, obținem că $e=\sqrt{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\sqrt{\left(f^2(x)-1\right)\left(f^2(y)-1\right)+1}=\sqrt{(x+1-1)(y+1-1)+1}=\sqrt{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in M$, deci f este un morfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**3p**
	f este continuă, f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+1)e^{-x}\cdot(-1)=$	**3p**
	$=(1-(x+1))e^{-x}=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\dfrac{(f(n))^n}{e^n(f(n+1))^n}=\left(\dfrac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}}\right)^n=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(f(n))^n}{e^n(f(n+1))^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+2}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{-x}\right)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x}=0$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=1$ și f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow m\in(0,1)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1(f(x)-x)dx=\int_0^1\frac{2}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=2\ln 2-2\ln 1=2\ln 2$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\|_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	F este primitivă a lui f și $F(0)=0$, deci $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2\ln(x+1)$	**1p**
	$\displaystyle\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\int_0^1 2F(x)F'(x)dx=F^2(x)\Big\|_0^1=\frac{1}{4}+2\ln 2+4\ln^2 2$	**2p**
	$\dfrac{1}{4}+2\ln 2+4\ln^2 2=\dfrac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a\Leftrightarrow 4\ln^2 2=\ln^2 a$, deci $\ln a=-2\ln 2$ sau $\ln a=2\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{4}$ sau $a=4$, care convin	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului real $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y=2x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=3$ și $m(\sphericalangle BAC)=60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ și $\left(A(a)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-\left(A(a)\right)^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

5p **b)** Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $m\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M\left(m,f(m)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x$.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0<\sqrt{2}-1<1 \Rightarrow 0<\left(\sqrt{2}-1\right)^2<1$	**3p**
	Partea întreagă a numărului real x este 0	**2p**
2.	$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2x=2x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$	**2p**
3.	$4^{x-2}=4^{2x-7} \Leftrightarrow x-2=2x-7$	**3p**
	$x=5$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_{10}^3=$	**3p**
	$=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow B$ este mijlocul segmentului AC, deci $2=\dfrac{1+x_C}{2}$ și $5=\dfrac{3+y_C}{2}$	**3p**
	$x_C=3$ și $y_C=7$	**2p**
6.	$\cos(\sphericalangle BAC)=\dfrac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle BAC)$, deci $BC=\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=5+\sqrt{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-3-(-4)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2-3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Pentru orice număr rațional q, $\det(A(q))\neq 0$, deci matricea $A(q)$ este inversabilă	**3p**
c)	Pentru orice număr rațional p, $B(p)=2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&p\\-1&-p&0\end{pmatrix}$, $B(p)B(p)=-4\begin{pmatrix}1&p&0\\p&p^2&0\\0&0&1+p^2\end{pmatrix}$ și $B(p)B(p)B(p)=-4\left(p^2+1\right)B(p)$	**3p**
	$\left(1-4p^2\right)B(p)=O_3 \Leftrightarrow p=-\dfrac{1}{2}$ sau $p=\dfrac{1}{2}$, care convin	**2p**
2.a)	$\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{1}{5}$	**2p**

b)	$x*\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\frac{1}{2}*x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x=x*\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in G$ și, cum $\frac{1}{2}\in G$, obținem că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x*y)=\frac{2xy-x-y+1}{xy}-1=\frac{xy-x-y+1}{xy}=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,y\in G$, deci f este un morfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**3p**
	f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $M(m,f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x\Leftrightarrow f'(m)=2$	**2p**
	$1+\ln m=2\Rightarrow m=e$, care convine	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, deci $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x\ln x\geq-\frac{1}{e}$, deci $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\cos t\,dt=\sin t\Big\|_0^x=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$	**3p**
c)	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leq\cos x\leq 1\Rightarrow 0\leq\cos^n x\leq 1\Rightarrow I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x(\cos x-1)dx\leq 0\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ e descrescător	**2p**
	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos^n x\geq 0\Rightarrow I_n\geq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, de unde obținem că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le\sqrt{5}\}$.

5p **2.** Determinați numerele reale m și n, știind că $f(1)=2$ și $f(2)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+2\cdot4^x-8=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O, intersecția diagonalelor acestuia. Arătați că $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $\sin x$, știind că $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=\frac{26}{9}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „$*$” sunt numere naturale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n, $n\ge2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx = 2(e-3)^2$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$A=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$f(1)=m+n$ și $f(2)=2m+n$, deci $m+n=2$ și $2m+n=1$	**2p**
	$m=-1,\ n=3$	**3p**
3.	$\left(4^x+4\right)\left(4^x-2\right)=0$	**2p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\frac{1}{2}$	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au cifra sutelor un număr prim are $4\cdot 10\cdot 10=400$ de elemente, deci sunt 400 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}$	**1p**
5.	O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$	**3p**
	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, obținem $\sin x=-\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+3+0-0-(-2)+0=5$	**2p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=a^2-6a+5$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică $\left(x_0,y_0,z_0\right)$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2(a-1)}{a-5},-\frac{2}{a-5},-\frac{a+1}{a-5}\right)$	**3p**
	$2\cdot\left(-\frac{2}{a-5}\right)=\frac{2(a-1)}{a-5}+\left(-\frac{a+1}{a-5}\right)$, deci $a=-1$, care convine	**2p**

2.a)	$1*3=1+3-\frac{1\cdot 3}{3}=$	**3p**
	$=1+3-1=3$	**2p**
b)	$x*x=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$, $x*x*x=\frac{1}{3^2}(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{9}(x-3)^3+3=\frac{26}{9}\Leftrightarrow(x-3)^3=-1\Leftrightarrow x-3=-1$, de unde obținem $x=2$	**3p**
c)	$x*0=0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$n*n'=0\Leftrightarrow n'(n-3)=3n$, deci $n'=\frac{3n}{n-3}$, pentru orice număr natural n, $n\neq 3$	**2p**
	Cum n și n' sunt numere naturale, obținem $n=0$, $n=4$, $n=6$ sau $n=12$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4(x^4-1)}{x}=\frac{4(x^2-1)(x^2+1)}{x}=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4-4\ln x\right)=+\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte, $x_1\in(0,1)$ și $x_2\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^e \frac{1}{x^2}f(\ln x)dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^3 x\,dx=\frac{\ln^4 x}{4}\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{\ln^4 e}{4}-\frac{\ln^4 1}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$F(x)=\left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x+c$, $c\in\mathbb{R}$ și, cum $F(0)=0\Rightarrow F(x)=\left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x+6$	**2p**
	$\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\|_0^1=\frac{1}{2}\left(F^2(1)-F^2(0)\right)=2(e-3)^2$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}<2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2-4x+5$. Determinați produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x-2}+3^{x+2}=91$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^9$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Determinați ecuația dreptei OG, știind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=2$ și $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=7$.

5p **b)** Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\frac{1}{54}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x f(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x} \ln x \, dx = \frac{e^2 - 7}{4}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, $a > 1$ pentru care $\int_1^a f(x) e^x dx = e^a - 3e$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)<2$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egal cu -5	**3p**
3.	$3^{x-2}\left(3^2+1+3^4\right)=91\Leftrightarrow 3^{x-2}=1$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_9^k x^{\frac{9-k}{2}+(-k)}=C_9^k x^{\frac{9-3k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,9\}$	**3p**
	$\frac{9-3k}{2}=0\Leftrightarrow k=3$, deci $T_4=C_9^3=84$ nu îl conține pe x	**2p**
5.	$G\left(\frac{-1+1+3}{3},\frac{1+3+2}{3}\right)$, deci $G(1,2)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC	**3p**
	Ecuația dreptei OG este $y-0=\frac{2-0}{1-0}(x-0)$, deci $y=2x$	**2p**
6.	$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow 2R=\frac{4}{\sqrt{2}}$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R=\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+6-(-3)-4-0=7$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=11-4a$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	Cum $\det\left(A(a)\right)=0\Leftrightarrow a=\frac{11}{4}\notin\mathbb{Z}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, pentru orice număr întreg a, deci rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a	**3p**
c)	Pentru orice număr întreg m, $A(m)$ este inversabilă și $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi $\Leftrightarrow\det\left(A(m)\right)=-1$ sau $\det\left(A(m)\right)=1$	**3p**
	Cum m este număr întreg, obținem $m=3$	**2p**

2.a)	$2\circ 2=\frac{2\cdot 2}{2+2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{4}=1$	**2p**
b)	$x\circ y\circ z=\left(\frac{xy}{x+y}\right)\circ z=\frac{\frac{xy}{x+y}\cdot z}{\frac{xy}{x+y}+z}=\frac{xyz}{xy+xz+yz}=$	**3p**
	$=\frac{1}{\frac{xy}{xyz}+\frac{xz}{xyz}+\frac{yz}{xyz}}=\frac{1}{z^{-1}+y^{-1}+x^{-1}}=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$	**2p**
c)	$\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(2+3+4+\ldots+10\right)^{-1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}-1\right)^{-1}=54^{-1}=\frac{1}{54}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	f este continuă pe $(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\ln e^2=2$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(x-3)\ln x\,dx+\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-3\right)dx+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln^2 x\Big\vert_1^e=$	**2p**
	$=\frac{e^2}{2}-3e-\left(\frac{x^2}{4}-3x\right)\Big\vert_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\frac{e^2}{2}-3e-\left(\frac{e^2}{4}-3e-\frac{1}{4}+3\right)+1=\frac{e^2-7}{4}$	**3p**
c)	$\int_1^a f(x)e^x dx=\left(x^2-3x+2\right)e^x\Big\vert_1^a-\int_1^a(2x-3)e^x dx=\left(x^2-5x+7\right)e^x\Big\vert_1^a=\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e$	**3p**
	$\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e=e^a-3e\Leftrightarrow a^2-5a+6=0$, deci $a=2$ sau $a=3$, care convin	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$. Calculați $(f\circ g)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2^{6x}}=16$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr impar.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD=6$, $AB=4$ și $m(\sphericalangle ADC)=120°$. Determinați modulul vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=60$, $AC=80$ și $BC=100$. Calculați lungimea înălțimii AD a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1 & -2\\ a-1 & -1 & 1\\ 2a & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(2a+1)x+y-2z=a\\(a-1)x-y+z=a+1\\2ax-2y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2,y_0,z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$.

5p **a)** Arătați că $2*64=4$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați $x\in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(5)=6$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f'(x)=0$ are trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

5p **a)** Determinați primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)$ pentru care $G(0)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)=3^2-(2i)^2-4+i=9+i$	**2p**
	Partea reală a numărului complex z este egală cu 9	**3p**
2.	$g(2)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(2)=f(g(2))=3\cdot 1+2=5$	**3p**
3.	$2^{\frac{6x}{3}}=2^4 \Leftrightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor un număr impar are $5\cdot 5\cdot 5=125$ de elemente, deci sunt 125 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{125}{900}=\dfrac{5}{36}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AD^2+DC^2-2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos(\sphericalangle ADC)\Rightarrow AC=2\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A	**2p**
	$AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=48$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}3&1&-2\\0&-1&1\\2&-2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+0+2-4-(-6)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=3a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=\dfrac{2}{3}$	**3p**
c)	Dacă $a=\dfrac{2}{3}$, sistemul de ecuații este incompatibil	**1p**
	Dacă $a\neq\dfrac{2}{3}$, atunci $\det(A(a))\neq 0$, deci sistemul de ecuații este compatibil determinat și, cum există y_0 și z_0 astfel încât $(2,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, obținem $\dfrac{2(2a+1)}{3a-2}=2$	**3p**
	$a=3$, care convine	**1p**

2.a)	$2*64=\sqrt[3]{2^{\log_2 64}}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$	**2p**
b)	$x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}=x^{\frac{1}{3}\log_2 y}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 y}=2^{\frac{1}{3}\log_2 x\log_2 y}=$	**2p**
	$=2^{\frac{1}{3}\log_2 y\log_2 x}=\left(2^{\log_2 y}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y*x$, pentru orice $x,y\in G$, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$x*8=8*x=x$, pentru orice $x\in G\Rightarrow e=8$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$x*x=8\Leftrightarrow x^{\log_2 x}=8^3\Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\left(8^3\right)\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2=9$	**2p**
	$\log_2 x=-3$ sau $\log_2 x=3$, deci $x=\frac{1}{8}$ sau $x=8$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-4)(x-3)(x-2)+(x-5)\left((x-4)(x-3)(x-2)\right)'$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(5)=(5-4)(5-3)(5-2)+0=6$	**2p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}=\frac{n-1}{n-5}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^{\frac{n-5}{4}}\right)^{\frac{4n}{n-5}}=e^4$	**3p**
c)	$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$	**2p**
	f este derivabilă, deci, conform teoremei lui Rolle pe $[2,3]$, $[3,4]$ și $[4,5]$, ecuația $f'(x)=0$ are o soluție reală în fiecare dintre intervalele $(2,3)$, $(3,4)$ și $(4,5)$	**3p**
2.a)	$g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)=1-e^x\Rightarrow\int g(x)dx=x-e^x+\mathcal{C}\Rightarrow G(x)=x-e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$G(0)=0$, deci $c=1$, de unde obținem $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=x-e^x+1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx=\left.\left(x-2\ln\left(1+e^x\right)\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=1-2\ln(1+e)+2\ln 2=1+2\ln\frac{2}{e+1}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=\int_1^{-1} f(-x)\cos(-x)\cdot(-1)dx=\int_{-1}^1 f(-x)\cos x dx=\int_{-1}^1\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cos x dx=$ $=\int_{-1}^1\frac{e^x-1}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1\frac{1-e^x}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx$	**3p**
	$2\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$, deci $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+2$. Demonstrați că $f(x+1)-f(x)=g(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-2x-1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ și $A(1,2)$, $B(4,5)$ și $D(-3,2)$. Determinați ecuația dreptei MN, știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

5p **6.** Calculați $\sin 2x$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2=2+3\sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=i$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12$.

5p **a)** Arătați că $x*1=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $0*x=-9$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x*y=3$, atunci $(x-1)(y-1)=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{e^x}\,dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e f(x)dx + \int_1^e e^x \ln x\, dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\sqrt{42}+\sqrt{7}-\sqrt{42}-\sqrt{6}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$	**2p**
	Cum $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$, obținem că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$	**3p**
2.	$f(x+1)-f(x)=(x+1)^2+(x+1)+1-\left(x^2+x+1\right)=$	**2p**
	$=x^2+2x+1+x+1+1-x^2-x-1=2x+2=g(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x-1=x^2-2x-1\Rightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi ale lui M, cu cel puțin trei elemente, este egal cu $C_5^3+C_5^4+C_5^5=$	**3p**
	$=10+5+1=16$	**2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AD, $m_{AB}=1$	**3p**
	Cum MN este paralelă cu AB, ecuația dreptei MN este $y-2=x+1$, deci $y=x+3$	**2p**
6.	$4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=2+3\sin^2 x\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=2-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$	**3p**
	$2\sin 2x=2-1$, deci $\sin 2x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-i+0+0-(-2i)-0-0=i$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&2\\a&i&a\\-1&a&-1\end{vmatrix}=a^2+i$, pentru orice număr real a	**2p**
	Cum, pentru orice număr real a, $a^2+i\neq 0$, obținem că $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&i^2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3$	**2p**
	$\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori }A(0)}=\underbrace{(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot\ldots\cdot(-I_3)}_{\text{de 1010 ori }(-I_3)}=I_3$	**3p**

2.a)	$x*1=3^{x+1}-3^{x+1}-3^{1+1}+12=$ $=-9+12=3$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$0*x=3^{0+x}-3^{0+1}-3^{x+1}+12=3^x-3^{x+1}+9$, deci $3^{x+1}-3^x=18$ $3^x(3-1)=18\Leftrightarrow 3^x=9$, deci $x=2$	**3p** **2p**
c)	$x*y=3\Leftrightarrow 3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+9=0\Leftrightarrow 3^x\left(3^y-3\right)-3\left(3^y-3\right)=0\Leftrightarrow\left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)=0$ $3^x-3=0$ sau $3^y-3=0$, deci $x=1$ sau $y=1$, de unde obținem $(x-1)(y-1)=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\dfrac{2x}{x^2+1}=$ $=\dfrac{2x^3+2x-2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Ecuația tangentei la graficul funcției f în $A(a,f(a))$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, deci axa Ox, de ecuație $y=0$, este tangentă la graficul funcției f dacă și numai dacă există numărul real a astfel încât $f'(a)=0$ și $f(a)=0$ Cum $f'(0)=0$ și $f(0)=0$, obținem că axa Ox este tangentă graficului funcției f	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ f este continuă pe $\mathbb{R}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=0$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte	**2p** **3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$ $=\ln e-\ln 1=1$	**3p** **2p**
b)	$\displaystyle\int_1^2 x^3f\left(x^2\right)dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_1^2=$ $=\dfrac{e^4-e}{2}=\dfrac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e\frac{e^x}{x}dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'e^x\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e e^x\ln x\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=$ $=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $N=\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2$ este pătratul unui număr natural.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $(f\circ f)(1)+f(1)=1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $4^x+4^{1-x}=4$.
5p	**4.** Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,5,7\}$.
5p	**5.** Se consideră punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M, mijlocul segmentului AG. Demonstrați că $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
5p	**6.** Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $4\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ a+4 & a+3 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-15$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2020}$.
5p	**a)** Arătați că $x*(-x)=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{2021}$.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.
5p	**a)** Arătați că $\int\limits_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=4$.

5p	**b)** Calculați $\int_{-4}^{1} f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)\,dx = 6 - 2\sqrt{5}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=5+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13+5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13=$	**3p**
	$=36=6^2$	**2p**
2.	$f\left(f(1)\right)+f(1)=1\Leftrightarrow f(1)+a+1+a=1\Leftrightarrow 3a+2=1$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{3}$	**2p**
3.	$4^x+\dfrac{4}{4^x}=4\Leftrightarrow 4^{2x}-4\cdot4^x+4=0\Leftrightarrow\left(4^x-2\right)^2=0$	**3p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 2 moduri și pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor și a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege într-un singur mod, deci se pot forma $2\cdot2\cdot1=4$ numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$, unde D este mijlocul segmentului BC	**2p**
	G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ și, cum $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, obținem $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$, deci $\sin A=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	Cum ΔABC este ascuțitunghic, obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-6)+8-8-9-0=-15$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\a+4&a+3&a\end{vmatrix}=-15(a+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Rangul matricei $A(a)$ nu este egal cu $3\Leftrightarrow\det\left(A(a)\right)=0$, deci $a=-1$	**3p**
c)	$A(-1)A(-1)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&0\\5&10&-5\\10&0&0\end{pmatrix}=5B$, unde $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\2&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$M=5^2B\cdot B$ și, cum matricea $B\cdot B$ are toate elementele numere întregi, obținem că matricea M are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25	**2p**

2.a)	$x*(-x)=\sqrt[3]{x^3+(-x)^3+2020}=$ $=\sqrt[3]{x^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{(x+1)^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{3x^2+3x+2021}$, deci $3x^2+3x+2021=2021$ $3x(x+1)=0$, deci $x=-1$ sau $x=0$	**3p** **2p**
c)	$\sqrt[3]{3x^3+4040}=a\Leftrightarrow 3x^3+4040=a^3\Leftrightarrow x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$ Pentru orice număr real a, ecuația $x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$ are o singură soluție reală $x=\sqrt[3]{\dfrac{a^3-4040}{3}}$, deci există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12x+9=$ $=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=6x-12$, $x\in\mathbb{R}$ Cum $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$, obținem că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left.(x^2+3x)\right\|_0^1=$ $=1+3-0=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-4}^1 f(x)\,dx=\int_{-4}^1\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=\int_{-4}^1\dfrac{(x^2+3x+5)'}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=\left.2\sqrt{x^2+3x+5}\right\|_{-4}^1=$ $=2\sqrt{9}-2\sqrt{9}=0$	**3p** **2p**
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $(F(\sin x))'=F'(\sin x)\cdot(\sin x)'=f(\sin x)\cdot\cos x$, pentru orice număr real x $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\, f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(F(\sin x))'\,dx=\left.F(\sin x)\right\|_0^{\frac{\pi}{2}}=F(1)-F(0)=2\sqrt{1^2+3\cdot1+5}-2\sqrt{5}=6-2\sqrt{5}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_3 - 4b_2 = -8$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(f(1),1)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1}$.

5p **4.** Determinaţi numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ și $H(3,2)$. Știind că H este ortocentrul triunghiului ABC, determinați panta dreptei BC.

5p **6.** Determinați $x \in (0,\pi)$, știind că $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m,m^2)$ și $C\left(m+1,(m+1)^2\right)$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.

2. Pe mulțimea $G = (0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = 2^{\ln x \cdot \ln y}$.

5p **a)** Arătați că $x * 1 = 1$, pentru orice $x \in G$.

5p **b)** Determinați $f \in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x \in G$ pentru care $x * \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln\left(e^x + x - 1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{x-2}{e^x + x - 1}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

5p	**b)** Calculați $\int_{-1}^{1} \lvert x f(x) \rvert dx$.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{0}^{x} f(t)\, dt = 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 q = 2q$ și $b_3 = b_1 q^2 = 2q^2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$	**2p**
	$q^2 - 4q + 4 = 0$, deci $q = 2$	**3p**
2.	$A(f(1),1)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f(f(1)) = 1$	**2p**
	$f(1) + m = 1 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1$, deci $m = 0$	**3p**
3.	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$	**2p**
	$x = -\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x = -1$, care nu convine, sau $x = 1$, care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	$b^2 = c - a$, unde $\overline{abc}$ sunt numerele cu proprietatea dată și, cum $c \le 9$ și $a \ge 1$, obținem $b^2 \le 8$, deci $b \in \{0,1,2\}$	**2p**
	Pentru $b = 0$, obținem $c = a$, deci sunt 9 numere, pentru $b = 1$, obținem $c = a + 1$, deci sunt 8 numere, iar pentru $b = 2$, obținem $c = a + 4$, deci sunt 5 numere; în total sunt 22 de numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	Panta dreptei AH este $m_{AH} = \frac{1}{3}$	**2p**
	H este ortocentrul ΔABC, deci $AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$, de unde obținem $m_{BC} = -3$	**3p**
6.	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$	**2p**
	$2\sin x\cos x = -1$, deci $\sin 2x = -1$ și, cum $x \in (0,\pi)$, obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$, deci $x = \frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	**3p**
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$, pentru orice număr real m	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \ne 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow \lvert m(m-1)\rvert = 2$, deci $m^2 - m = -2$, care nu convine, sau $m^2 - m = 2$, de unde obținem $m = -1$ sau $m = 2$, care convin	**3p**

2.a)	$x*1=2^{\ln x\cdot\ln 1}=$	**3p**
	$=2^{\ln x\cdot 0}=2^0=1$, pentru orice $x\in G$	**2p**
b)	$x*f=x\Leftrightarrow 2^{\ln x\cdot\ln f}=x\Leftrightarrow \ln x\cdot\ln f\cdot\ln 2=\ln x$, pentru orice $x\in G$, deci $\ln f\cdot\ln 2=1$, de unde obținem $\ln f=\dfrac{1}{\ln 2}$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}\in G$	**3p**
	$e^{\frac{1}{\ln 2}}*x=2^{\ln e^{\frac{1}{\ln 2}}\cdot\ln x}=2^{\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln x}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*\dfrac{1}{x}=2^{\ln x\cdot\ln\frac{1}{x}}=2^{-\ln^2 x}$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$2^{-\ln^2 x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln^2 x=1$, de unde obținem $\ln x=-1$ sau $\ln x=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{e}$ sau $x=e$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=1-\dfrac{e^x+1}{e^x+x-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{e^x+x-1-e^x-1}{e^x+x-1}=\dfrac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+x-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+x-1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{e^x}}=\ln 1=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(2)=2-\ln\left(e^2+1\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci imaginea funcției f este $\left[2-\ln\left(e^2+1\right),+\infty\right)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 1=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_{-1}^1\|x f(x)\|dx=\int_{-1}^0 -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx+\int_0^1 x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_{-1}^0+\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=0-1+\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-1$	**2p**
c)	Din regula lui l’Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(-x)$ este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{\frac{1}{2}-x}=1+\sqrt{3}$.

5p **4.** Determinați termenul care îl conține pe x^{10} din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, unde $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **5.** În planul triunghiului ABC se consideră punctul G, astfel încât $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x-3\sin x-2\cos x+3=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(2-i)=6+i$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $z\circ\overline{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(-x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 5\cdot\left(2\log_5 3\right)=2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}^2$, deci numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$g(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)=$	**2p**
	$=-\left(f(x)-f(-x)\right)=-g(x)$, deci funcția g este impară	**3p**
3.	$3^x+\dfrac{\sqrt{3}}{3^x}=1+\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{2x}-\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 3^x+\sqrt{3}=0$	**2p**
	$\left(3^x-1\right)\left(3^x-\sqrt{3}\right)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**3p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\left(x^3\right)^{20-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_{20}^k x^{3(20-k)+\frac{-k}{3}}=C_{20}^k x^{60-\frac{10k}{3}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,20\}$	**3p**
	$60-\dfrac{10k}{3}=10\Leftrightarrow k=15$, deci $T_{16}=C_{20}^{15}x^{10}$ îl conține pe x^{10}	**2p**
5.	$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$	**2p**
	$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$, deci G este centrul de greutate al ΔABC	**3p**
6.	$\sin x(2\cos x-3)-(2\cos x-3)=0\Leftrightarrow(\sin x-1)(2\cos x-3)=0$	**2p**
	Cum $2\cos x-3\neq 0$ și $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=3+0+0-1-0-1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$\det\left(M(m)\right)=(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
	Dacă $m=1$, matricea $M(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ are rangul 1, iar dacă $m\neq 1$, atunci $\det\left(M(m)\right)\neq 0$ și matricea $M(m)$ are rangul 3, deci, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2	**3p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\2-m&m-1&0\\2-m&0&m-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	Obținem $m=2$, care convine	**2p**

2.a)	$(1+i)\circ(2-i)=1+i+2-i+(1+i)(2-i)=$	**3p**
	$=3+2-i+2i-i^2=6+i$	**2p**
b)	Dacă $z=a+ib$, unde a și b sunt numere reale, atunci $z\circ\overline{z}=a+ib+a-ib+(a+ib)(a-ib)=$	**3p**
	$=2a+a^2+b^2$, care este număr real, pentru orice număr complex z	**2p**
c)	$2z+z^2=-2\Leftrightarrow z^2+2z+2=0$	**2p**
	$\Delta=-4$, deci $z=-1-i$ sau $z=-1+i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\ln 1=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n=\ln\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{3}{7}+\ln\dfrac{7}{13}+\ldots+\ln\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}+2\ln n=$ $=\ln\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{7}{13}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)+\ln(n^2)=\ln\dfrac{1}{n^2+n+1}+\ln(n^2)=\ln\dfrac{n^2}{n^2+n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{n^2}{n^2+n+1}=\ln 1=0$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 e^x f(x)dx=\int\limits_0^1(x^2+1)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+1-0=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 f(-x)dx=\int\limits_0^1(x^2+1)e^x dx=\left.(x^2+1)e^x\right\|_0^1-\int\limits_0^1 2xe^x dx=2e-1-\left.2(x-1)e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-0+(-2)=2e-3$	**2p**
c)	F este primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow -e^{-x}(-x^2+ax+b)+e^{-x}(-2x+a)=e^{-x}(x^2+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-(a+2)x+a-b=x^2+1$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow a=-2$ și $b=-3$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z = 3\overline{z}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că numerele $f(0)$, $f(2)$ și $f(1)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(-x)=\log_3\left(x^2-2x-2\right)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $BC=R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu 21.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $1*2=13$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x*x)*x^2=61$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

5p **c)** Demonstrați că $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 (f(x)-\ln x)\,dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 (f(x)-x^2)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+ib=3(a-ib)\Leftrightarrow 2a-4ib=0$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=0$ și $b=0$, deci $z=0$	**2p**
2.	$f^2(2)=f(0)f(1)\Leftrightarrow(4+a)^2=a(2+a)\Leftrightarrow a^2+8a+16=a^2+2a$	**2p**
	$6a=-16$, deci $a=-\frac{8}{3}$	**3p**
3.	$-x=x^2-2x-2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**2p**
	$x=-1$, care convine, sau $x=2$, care nu convine	**3p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=$	**2p**
	$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow\sin A=\frac{BC}{2R}$	**2p**
	$BC=R\Rightarrow\sin A=\frac{1}{2}$ și, cum ΔABC este ascuțitunghic , obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1-0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real a	**2p**

c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & 0 \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\det A(2)\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, obținem că $X=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2}-2n & 4n-n(n+1) \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2}-2n \\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor matricei X este egală cu $3n$, deci $3n=21 \Leftrightarrow n=7$, care convine	**2p**
2.a)	$1*2=1^2+4\cdot 1\cdot 2+2^2=$	**3p**
	$=1+8+4=13$	**2p**
b)	$x*x=x^2+4x\cdot x+x^2=6x^2$, $(x*x)*x^2=\left(6x^2\right)*x^2=36x^4+24x^4+x^4=61x^4$	**3p**
	$61x^4=61 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	$x*1=x^2+4x+1=x^2+4x+4-3=(x+2)^2-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\sqrt{p}-2$, unde p este număr prim, $p\geq 3$, obținem că $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a*1=p-3\in\mathbb{N}$, deci există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-(x-3)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+3-x^2+3x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x(6-6x)}{2\left(x^2+3\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x^2\left(\frac{6}{x}-6\right)}{2x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=e^{-3}$	**2p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=-2$, obținem că $f(x)\geq -2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x-3\geq -2\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow x+2\sqrt{x^2+3}\geq 3$, pentru orice număr real x, deci $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{26}{3}$	**2p**

b)	$\int_1^2 \left(f(x) - x^2 \right) dx = \int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx =$	**3p**
	$= 2\ln 2 - x \Big|_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$	**2p**
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2} + \ln\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(x^{-3} - \frac{1}{x}\ln x\right) dx = \left(\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{1}{2}\ln^2 x\right)\Big|_1^2 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln^2 1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln^2 2 = \frac{3 - 4\ln^2 2}{8}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-\sqrt{5}<x<\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x^2+2bx+1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$.

5p **4.** Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați $\cos x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

5p **c)** Dați exemplu de trei matrice $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $(-1)*1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[12,+\infty)$, atunci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^4+1\right) f(x)\,dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 f(x)\,dx\le\dfrac{\pi}{8}$.

5p **c)** Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculați $\int_0^1 F(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-3<-\sqrt{5}<-2$ și $2<\sqrt{7}<3$, deci $A=\{-2,-1,0,1,2\}$	**3p**
	Mulțimea A are 5 elemente	**2p**
2.	Parabolele asociate celor două funcții au același vârf, deci $\frac{2}{2}=\frac{-2b}{-2}$ și $\frac{4a-4}{4}=\frac{4b^2+4}{4}$	**3p**
	$b=1$, deci $a=3$	**2p**
3.	$1+x+1-x+3\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=8$ și, cum $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$, obținem $2+6\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}=8$	**3p**
	$\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}=1$, deci $x=0$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente, $n\geq 2$, este egal cu $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=12 \Leftrightarrow n^2-n-24=0$, care nu are nicio soluție număr natural	**3p**
5.	$m_{AH}=3$ și $m_{BC}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{AH}\cdot m_{BC}=-1$, deci $AH\perp BC$	**2p**
	$m_{BH}=\frac{1}{2}$ și $m_{AC}=-2\Rightarrow m_{BH}\cdot m_{AC}=-1$, deci $BH\perp AC$ și, cum $AH\cap BH=\{H\}$, obținem că H este ortocentrul triunghiului ABC	**3p**
6.	$2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=-1$, deci $2\left(2\cos^2 x-1\right)=-1$	**3p**
	$\cos^2 x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{vmatrix}=36+36+36-36-36-36=$	**3p**
	$=108-108=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}30&20&10\\60&40&20\\90&60&30\end{pmatrix}=10A\Rightarrow\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)\cdot B=I_3+A-\frac{1}{11}A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$	**3p**
	$B\cdot\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=I_3-\frac{1}{11}A+A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$, deci matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B	**2p**

c)	Considerăm $U=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\9&6&4\end{pmatrix}$, pentru care $\operatorname{rang}U=1$, $\operatorname{rang}V=1$ și $\operatorname{rang}T=1$	**3p**
	Cum $U+V+T=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$, obținem că matricele $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au rangul 1 și $U+V+T=B$	**2p**
2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot 1-3\cdot(-1)-3\cdot 1+a=a-1$	**3p**
	$a-1=0\Leftrightarrow a=1$	**2p**
b)	Există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow xe-3x-3e+a=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(e-4)-3e+a=0$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=4$ și $a=12$	**3p**
c)	$x*y=xy-3x-3y+9+a-9=(x-3)(y-3)+a-9$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Pentru orice $x,y\in[3,+\infty)$, $x-3\geq 0$ și $y-3\geq 0$ și, cum $a\in[12,+\infty)$, obținem $x*y\geq 3$, deci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}>0$, deci $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, f monotonă și continuă pe $(0,+\infty)$, deci $\operatorname{Im}f=(0,1)\Rightarrow f$ este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^2\leq x$, deci $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^4+1}dx\leq\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**

c)	$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'F(x)dx=xF(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 x f(x)dx=F(1)-\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}dx=-\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\Big\vert_0^1=-\frac{1}{4}\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z^2+z+2=0$, unde z este număr complex, atunci $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{2x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. Arătați că $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}-3^x=2^{x+2}-2^{x+1}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\left\{\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că punctele D, M și N sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=xy+5x+5y+20$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=23$.

5p **b)** Demonstrați că $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Pentru $r\in\{0,1,2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3. Determinați numerele $r\in\{0,1,2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(e^x-e)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinaţi punctul de extrem al funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg} x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+2=0\Rightarrow z\neq 0$ și $z+\frac{2}{z}=-1$	**2p**
	$\left(z+\frac{2}{z}\right)^2=1$, deci $z^2+4+\frac{4}{z^2}=1$, de unde obținem $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$	**3p**
2.	$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left\{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}=\{2x+1\}=$	**2p**
	$=\{2x\}=f(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$3^x(3-1)=2^{x+1}(2-1)\Leftrightarrow 2\cdot 3^x=2^{x+1}\Leftrightarrow 3^x=2^x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A astfel încât 3, 4 și a să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt $\sqrt{7}$ (dacă a este lungimea unei catete) și $\sqrt{25}$ (dacă a este lungimea ipotenuzei), deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{23}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$, deci $\overrightarrow{DM}$ și $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele D, M și N sunt coliniare	**3p**
6.	$\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}=\frac{AB^2+AC^2}{AB\cdot AC}$	**2p**
	Cum $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}<\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}$, obținem $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(m)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=2m+(-6)+2-m-(-3)-8=$	**3p**
	$=m+5-14=m-9$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	Sistemul de ecuații este omogen, deci admite soluții diferite de $(0,0,0)\Leftrightarrow\det\left(A(m)\right)=0$	**3p**
	$m=9$	**2p**

c)	$A(9)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 9 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\det(A(9))=0$ și $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A(9))=2$, deci soluțiile nenule ale sistemului de ecuații sunt de forma $\left(-\frac{7}{5}\alpha,\frac{1}{5}\alpha,\alpha\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$	**3p**
	$\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\frac{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}-\alpha^2}{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}+\alpha^2}=\frac{25\alpha^2}{75\alpha^2}=\frac{1}{3}$	**2p**
2.a)	$2*(-1)=2\cdot(-1)+5\cdot 2+5\cdot(-1)+20=$	**3p**
	$=-2+10+(-5)+20=23$	**2p**
b)	$x*(-4)=x\cdot(-4)+5x+5\cdot(-4)+20=-4x+5x+(-20)+20=x$, pentru orice număr întreg x	**3p**
	$(-4)*x=(-4)\cdot x+5\cdot(-4)+5x+20=-4x+(-20)+5x+20=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	Cum $0\circ 0=20$, $0\in A(0)$ și $20\notin A(0)$, mulțimea $A(0)$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**1p**
	$x,y\in A(1)\Rightarrow x=3m+1$ și $y=3n+1$, unde $m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9mn+18m+18n+31\in A(1)$, deci $A(1)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=1$ convine	**2p**
	$x,y\in A(2)\Rightarrow x=3k+2$ și $y=3l+2$, unde $k,l\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9kl+21k+21l+44\in A(2)$, deci $A(2)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=2$ convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-e+(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x-e+xe^x-e^x=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+1)e^x>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$ și, cum $f'(1)=0$, obținem că $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Cum f este strict descrescătoare pe $(-1,1)$, f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și f este continuă în $x_0=1$, obținem că $x_0=1$ este punctul de extrem al funcției f	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	Din regula lui l’Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot\ln(x+2)+\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+2)\right)'dx=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+2)\Big\vert_0^1=\operatorname{arctg}1\cdot\ln 3-\operatorname{arctg}0\cdot\ln 2=\frac{\pi}{4}\ln 3$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că, dacă $z=3+i$, unde z este număr complex, atunci $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x-6$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+3}=x+1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie un număr prim.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,-1)$. Știind că punctul M este simetricul lui A față de B și punctul N este simetricul lui B față de M, determinați coordonatele punctului N.

5p **6.** Arătați că, dacă $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x+\cos x=\cos 2x$, atunci $\sin x-\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-2x^2-2y^2+6$.

5p **a)** Arătați că $1*1=3$.

5p **b)** Arătați că $x*y\neq 2$, pentru orice numere raționale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real $a\in(-1,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+2020$.

5p **c)** Demonstrați că $(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3 f^2(x)\,dx=15$.

5p **b)** Demonstrați că $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

5p **c)** Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-6z+10=(3+i)^2-6(3+i)+10=9+6i+i^2-18-6i+10=$	**3p**
	$=9+(-1)-8=0$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x=x^2+2x-6\Leftrightarrow -6x=-6$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x+3=(x+1)^2\Rightarrow 2x+3=x^2+2x+1\Rightarrow x^2=2$	**2p**
	$x=-\sqrt{2}$, care nu convine sau $x=\sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor un număr prim sunt 12, 21, 13, 31, 15, 51, 17 și 71, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului $AM\Rightarrow x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2}$ și $y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2}$, deci $M(7,-4)$	**2p**
	M este mijlocul segmentului $BN\Rightarrow x_M=\dfrac{x_B+x_N}{2}$ și $y_M=\dfrac{y_B+y_N}{2}$, deci $N(11,-7)$	**3p**
6.	$\sin x+\cos x=\cos 2x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$	**3p**
	Cum $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, obținem $\cos x-\sin x=1$, deci $\sin x-\cos x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^y&0&0\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x\cdot 2^y&0&0\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$B = A(1+2+3) - I_3 = A(6) - I_3 = \begin{pmatrix} 2^6-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $\det B = 0$ și $\begin{vmatrix} 2^6-1 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 12\left(2^6-1\right) \neq 0$, obținem că rangul matricei B este egal cu 2	**3p**
2.a)	$1*1 = 1^2 \cdot 1^2 - 2\cdot 1^2 - 2\cdot 1^2 + 6 =$	**3p**
	$= 1 - 2 - 2 + 6 = 3$	**2p**
b)	$x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2\left(y^2-2\right) - 2\left(y^2-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right) = 0$	**3p**
	$x^2 = 2$ sau $y^2 = 2$, ceea ce este imposibil pentru orice numere raționale x și y, deci $x*y \neq 2$	**2p**
c)	$m^2n^2 - 2m^2 - 2n^2 + 6 = 3 \Leftrightarrow m^2n^2 - 2m^2 - 2n^2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \left(m^2-2\right)\left(n^2-2\right) = 1$	**2p**
	m și n sunt numere întregi $\Rightarrow m^2 - 2 = n^2 - 2 = -1$ sau $m^2 - 2 = n^2 - 2 = 1$, deci $m^2 = n^2 = 1$ sau $m^2 = n^2 = 3$, de unde obținem perechile de numere întregi $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} =$	**3p**
	$= \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum dreapta de ecuație $y = 3x + 2020$ are panta egală cu 3, obținem $f'(a) = 3$	**2p**
	$\frac{2a(a+2)}{a+1} = 3 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0$ și, cum $a \in (-1,+\infty)$, obținem $a = 1$	**3p**
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-1,0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$ și, cum $f(0) = 0$, obținem $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$	**3p**
	$x^2 + 2x \geq 2\ln(x+1) \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 2\ln(x+1) + 1$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3 f^2(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big\|_0^3 =$	**3p**
	$= 9 + 6 = 15$	**2p**
b)	$0 \leq I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx \leq \sqrt{3}\int_0^1 x^n\,dx = \sqrt{3}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1} = 0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1 x^{n+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx + 2\int_0^1 x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx =$	**2p**
	$= \int_0^1 x^{n+1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx + 2\int_0^1 x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx = \sqrt{3} - (n+1)I_n + 2\sqrt{3} - 2(n-1)I_{n-2}$ și obținem $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\ge1}$ cu $b_1=2$ și rația $q=\sqrt{5}$. Calculați partea întreagă a lui b_4.
5p	**2.** Se consideră funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și f^{-1}.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2x^2+x+1\right)-\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-2\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2=\lvert\vec{u}\rvert^2+\lvert\vec{v}\rvert^2$.
5p	**6.** Arătați că, dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos x$, atunci $x=\frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.
	2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2-\frac{1}{2}\overline{z_1}-\frac{1}{2}\overline{z_2}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**a)** Arătați că $(1+i)\circ(1-i)=1$.
5p	**b)** Se consideră $H=\{2+bi \mid b\in\mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Se consideră numărul complex z_0. Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p	**b)** Calculați $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice $a \in (0,+\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)dx = 27$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)dx$.
5p	**c)** Arătați că $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4=b_1q^3=2\cdot\sqrt{5}^3=10\sqrt{5}=\sqrt{500}$	**2p**
	$484<500<529\Rightarrow 22<\sqrt{500}<23$, deci partea întreagă a lui b_4 este egală cu 22	**3p**
2.	$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=x\Leftrightarrow 2f(x)-3=x\Leftrightarrow 2(2x-3)-3=x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
3.	$\log_2\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+2}=1\Rightarrow\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+2}=2\Rightarrow 2x^2+x+1=2x^2-2x+4$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor un număr divizibil cu 11 sunt 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 și 92, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	$\vec{u}+\vec{v}=(1+a)\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2=(1+a)^2+1$	**2p**
	Cum $\lvert\vec{u}\rvert^2=2$ și $\lvert\vec{v}\rvert^2=a^2+4$, obținem $a^2+2a+2=2+a^2+4$, deci $a=2$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=2\cos^2x\Leftrightarrow\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=2\cos^2x\Leftrightarrow\sin 2x=\cos 2x$	**2p**
	$\operatorname{tg}2x=1$ și, cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $2x=\dfrac{\pi}{4}$, deci $x=\dfrac{\pi}{8}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+2+1-1-0-2=0$	**3p**
b)	Dacă $m=-3$ și (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $\begin{cases}-3x_0+y_0+z_0=1\\2x_0-2y_0+z_0=2\\x_0+y_0-2z_0=-2\end{cases}$	**2p**
	Prin adunarea celor trei relații, obținem $0=1$, ceea ce este imposibil, deci, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații nu are soluții	**3p**
c)	$\det\left(A(m)\right)=m^3+2m^2-3m=m(m-1)(m+3)$, pentru orice număr real m	**1p**
	Dacă $m=0$, atunci $\begin{cases}y+z=1\\2x+y+z=2\\x+y+z=1\end{cases}$, care nu are soluții, dacă $m=1$, atunci $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+z=2\\x+y+2z=2\end{cases}$, care nu are soluții	**2p**

	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,1\}\Rightarrow\det\left(A(m)\right)\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică și, cum pentru $m=-3$, sistemul nu are soluții, obținem că sistemul de ecuații are cel mult o soluție	2p
2.a)	$(1+i)\circ(1-i)=1+i+1-i-\frac{1}{2}(1-i)-\frac{1}{2}(1+i)=$	3p
	$=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=1$	2p
b)	$z_1,z_2\in H\Rightarrow z_1=2+bi$ și $z_2=2+ci$, $b,c\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1\circ z_2=2+bi+2+ci-\frac{1}{2}(2-bi)-\frac{1}{2}(2-ci)=$	3p
	$=4+bi+ci-1+\frac{1}{2}bi-1+\frac{1}{2}ci=2+\frac{3}{2}(b+c)i\in H$, deci H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”	2p
c)	Dacă $z_0=a+ib$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, pentru $z=x-ib$, unde x este număr real oarecare, obținem $z_0\circ z=a+ib+x-ib-\frac{1}{2}(a-ib)-\frac{1}{2}(x+ib)=$	3p
	$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x\in\mathbb{R}$, deci există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\left(x^3-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3-3x+2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3x^2-3\right)=$	3p
	$=\frac{1}{3}\frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=$	3p
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$	2p
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci injectivă	2p
	$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	3p
2.a)	$\int_1^4 e^x f(x)dx=\int_1^4\left(x^2+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\right\|_1^4=$	3p
	$=\frac{4^3}{3}+8-\frac{1}{3}-2=21+6=27$	2p
b)	$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\frac{\ln^2 x+2}{e^{\ln x}}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\right)dx=\left.\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+2\ln x\right)\right\|_1^e=$	3p
	$=\frac{1}{3}\ln^3 e+2\ln e-\frac{1}{3}\ln^3 1-2\ln 1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$	2p
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2}{e^x}=2$	3p